# Les problèmes en mathémati

*Théorème de Fermat, conjecture de Poincaré, hypothèse de Riemann, voyageur de commerce… Ces problèmes, familiers aux amateurs de « grandes énigmes » mathématiques, ont résisté longtemps, voire résistent encore, aux plus doués des mathématiciens. En progressant vers une solution, ceux-ci doivent généralement créer de nouveaux outils et inventer de nouveaux concepts. C'est là tout l'intérêt de ces problèmes difficiles : la nature de la démonstration a autant de valeur, et parfois plus, que le résultat.*

**TOUTES CES SURFACES** sont topologiquement équivalentes à celle d'une sphère : elles sont reliées les unes aux autres par une déformation continue. les zones de courbure négative (en bleu) sont dilatées, tandis que les zones de courbure positive se contractent. Ce type de déformation, mais pour des « surfaces » à trois dimensions, est à la base de la conjecture de Poincaré.

difficiles

ques

Sommaire




**EN DEUX MOTS** Le mathématicien russe Grigori Perelman, qui a récemment refusé la médaille Fields, a montré que « la sphère est le seul espace compact simplement connexe de dimension 3 ». Il s'est appuyé sur les travaux précurseurs de William Thurston et de Richard Hamilton. Alliant topologie, géométrie et analyse, sa méthode consiste à déformer continûment une surface à trois dimensions, à l'opérer chirurgicalement aux endroits de trop grande courbure et à lui greffer des formes dont on connaît la géométrie.


# 1 La conjecture de Poincaré démontrée !

**Après un siècle de tentatives infructueuses, la conjecture de Poincaré vient d'être prouvée. L'auteur de cette prouesse, le Russe Grigori Perelman, a innové tout en suivant les traces de ses prédécesseurs qui avaient fait appel à la géométrie et à l'analyse.**


**Gérard Besson** est directeur de recherche au CNRS. Il travaille à l'institut Fourier, département de mathématiques de l'université de Grenoble-I.
G.Besson@ujf-grenoble.fr


Si la difficulté d'un problème mathématique se mesurait au nombre de médailles Fields attribuées à ceux qui l'ont résolu, la conjecture de Poincaré serait classée bonne première. En effet, la plus haute distinction de la communauté mathématique a couronné trois fois (1966, 1986, 2006) une avancée majeure dans la résolution du problème. En août 2006, son dernier récipiendaire, le Russe Grigori Perelman, l'a refusée. Pourtant, il la méritait amplement. La conjecture de Poincaré est, grâce à lui, aujourd'hui démontrée après presque un siècle de recherches.

En effet, entre novembre 2002 et juillet 2003, trois articles de Grigori Perelman ont mis en émoi la communauté des mathématiciens [1]. Le terme « article » ne convient pas tout à fait à la situation. En effet, ce mot désigne habituellement un texte soumis à une revue, accepté et publié par celle-ci. Un processus d'évaluation, qui peut prendre du temps, se déclenche dès la soumission, et conduit à l'acceptation ou au refus de la publication. Ce n'est pas le cas d'un texte mis sur Internet à la seule initiative de l'auteur, même si le site en question rassemble les prépublications des seuls scientifiques [2].

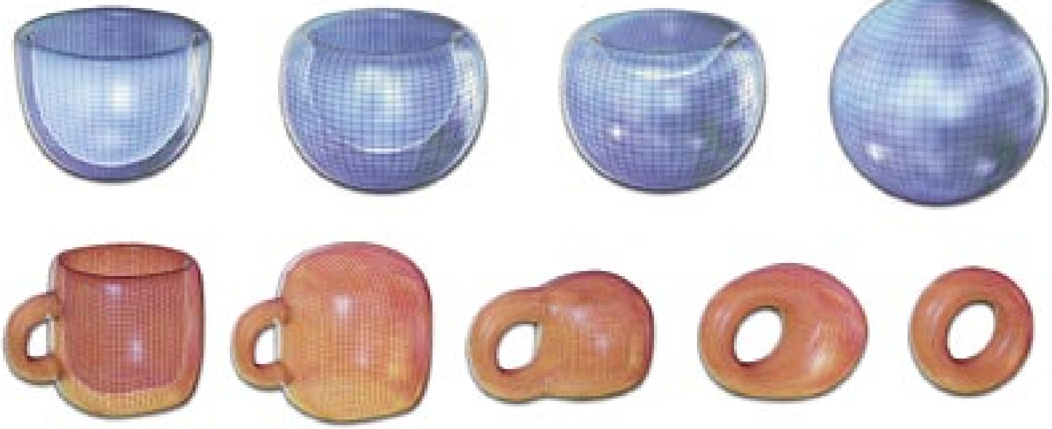
## Compact et connexe

Toutefois, G. Perelman n'était pas un inconnu, et la question qu'il abordait était tellement fondamentale que plusieurs groupes de mathématiciens se sont attelés à lire et comprendre les idées qu'il avait développées. Les écrits du mathématicien russe étant plus des esquisses que des preuves au sens strict, il s'en est suivi quelques polémiques dont les journaux non scientifiques se sont fait l'écho avec délectation. Il n'empêche. Après quatre années de travail, nous sommes aujourd'hui convaincus que « *la sphère est le seul espace compact simplement connexe de dimension 3* », ainsi que le prédisait Henri Poincaré en 1904, à la suite ⇨


[1] G. Perelman, www.arxiv.org/abs/math.DG/0211159, 2002 ; G. Perelman, www.arxiv.org/abs/math.DG/0303109, 2003 ; G. Perelman, www.arxiv.org/abs/math.DG/0307245, 2003.

[2] fr.archiv.org

**Fig.1 Le genre des surfaces**



**LORSQUE L'ON DÉFORME la surface d'un bol (en haut) sans la déchirer, on obtient une sphère. La même opération avec une tasse possédant une anse aboutit à une bouée (en bas). Toute déformation continue d'une surface de dimension 2 conduit à l'un de ces deux cas, ou à un nombre fini de bouées collées. Le nombre de trous indique le genre de la surface (0 pour la sphère, 1 pour la bouée...).**

⇨ de l'ensemble de ses travaux, en particulier sur la relativité générale et les équations différentielles.
Pour comprendre les termes de cette conjecture, le plus simple est de partir des espaces à deux dimensions, c'est-à-dire des surfaces habituelles. On peut toutes les classer dans une catégorie, qui rassemble celles qui peuvent se déformer continûment de l'une en l'autre. Par exemple, la surface d'un ballon de football peut être étirée de manière continue en celle d'un ballon de rugby, ou même repliée sous la forme d'un bol [fig. 1]. Chaque catégorie se représente par un nombre fini de bouées collées les unes aux autres. Le nombre de trous (ou de bouées) est appelé le genre de la surface.

## Courbe fermée

La surface de la sphère – ou du bol – est celle d'une bouée sans trou. Son genre est nul. Elle est la seule à être simplement connexe, c'est-à-dire à posséder la propriété suivante : toute courbe fermée tracée sur elle peut se déformer de manière continue, sans se briser, jusqu'à devenir un point. En effet, sur un tore (une bouée mathématique à un seul trou) ou sur des surfaces de genre supérieur, les courbes qui en font le tour n'ont pas cette propriété [fig. 2]. C'est encore plus vrai quand la surface est constituée de plusieurs morceaux séparés.

Mais ce qui est facilement concevable en deux dimensions l'est beaucoup moins aux dimensions supérieures. Il fallut plus de cinquante ans pour que Stephen Smale, de l'université de Chicago, démontre la conjecture de Poincaré dite généralisée. En 1960, il résolut la conjecture dans les espaces de dimension supérieure à cinq, ce qui lui valut la médaille Fields en 1966 [3]. Puis en 1982, Michael Freedman, actuellement au laboratoire de recherche de Microsoft dans la Silicon Valley, prouva sa véracité en dimension quatre [4]. Quatre ans plus tard, il fut lui aussi médaillé Fields. La conjecture de Poincaré, qui ne se préoccupe que des espaces en trois dimensions, a résisté vingt ans de plus, jusqu'aux travaux de G. Perelman. Avant lui, les mathématiciens qui s'y sont attaqués ont développé une remarquable variété de concepts qui font aujourd'hui partie de l'outillage standard de tout spécialiste de topologie. Mais, à elle seule, cette branche des mathématiques n'a pas été suffisante pour résoudre le problème.

## Espace tangent

Une étape fondamentale fut franchie à partir des années 1970 par le mathématicien américain William Thurston. Il ajouta à ce problème de topologie une composante géométrique. Pour comprendre ses travaux, il faut revenir aux définitions. Celle de l'espace tangent tout d'abord. Sur chaque point de l'espace étudié, la sphère par exemple, les vecteurs tangents des courbes qui passent par un point peuvent s'additionner et être multipliés par un nombre quelconque. Ils forment un espace vectoriel appelé espace tangent.

[3] S. Smale, *Annals of Mathematics, 74,* 391, 1961.
[4] M. H. Freedman, *J. Diff. Geom., 17,* 357, 1982.

## Qu'est-ce qu'une conjecture ?

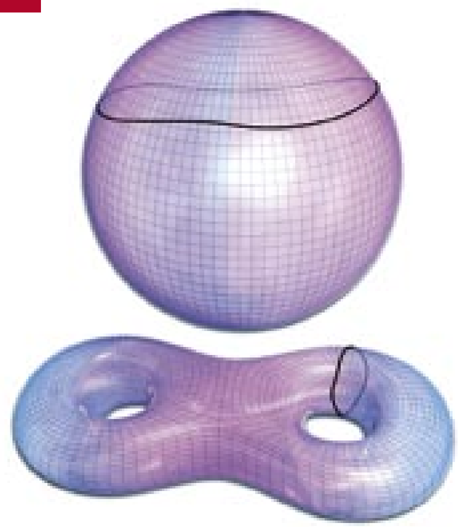
**IL ARRIVE QU'UN MATHÉMATICIEN** ne parvienne pas à résoudre un problème difficile. Pourtant, après des années de travail, il est convaincu de sa solution. Il émet alors l'hypothèse que la solution est celle à laquelle il pense. Lors de cette annonce, cette hypothèse devient une conjecture, que d'autres mathématiciens vont tenter de résoudre.
Parmi toutes les conjectures affirmées, rares sont celles qui persistent au-delà de quelques années sans être prouvées ou infirmées. C'est l'apanage des très grands mathématiciens que d'énoncer des propositions qui fournissent du travail à la communauté pendant des décennies, telle la conjecture de Poincaré, voire plusieurs siècles, comme le problème de Fermat.

Définir un instrument de mesure sur cet espace tangent, une géométrie au sens étymologique du terme, consiste à associer à chaque point de l'espace un produit scalaire, qui est une mesure à la fois de la longueur et de l'écart angulaire entre les différents couples de vecteurs. L'ensemble des produits scalaires en chaque point est appelé une métrique riemannienne. L'espace doté de cette métrique est appelé une variété riemannienne. On peut y définir une distance entre deux points quelconques : c'est la longueur d'une géodésique, la courbe la plus courte qui les joint.

## Métriques spéciales

Il existe une infinité de métriques possibles, mais certaines sont spéciales. C'est le cas lorsque, localement, la métrique est celle d'un espace euclidien, sphérique ou hyperbolique, des variétés qui se différencient par exemple par le nombre de parallèles passant par un point extérieur à une droite. Il n'y en a qu'une dans un espace euclidien, aucune dans un espace sphérique et une infinité dans un espace hyperbolique. Enfin, dernière définition, celle de la courbure. Elle mesure des écarts de longueurs des géodésiques ou d'angles. Dans ce dernier cas, il s'agit de la différence entre la somme des angles d'un triangle dans l'espace considéré et 180°, qui est la somme des angles d'un triangle dans un espace euclidien. Cette courbure peut varier d'un point à un autre. Si elle est indépendante du point où on la calcule, on dira qu'elle est constante. C'est le cas de l'espace euclidien, qui est, par définition, de cour- ⇨

**Fig.2 Simplement connexe**



**UNE SURFACE EST DITE «SIMPLEMENT CONNEXE»** si n'importe quelle courbe tracée dessus peut être déformée jusqu'à devenir un point. En dimension 2, ce n'est vrai que pour la sphère (en haut). Dès que la surface possède au moins un trou, on trouve des exceptions (en bas).



**HENRI POINCARÉ**, académicien des sciences à 33 ans, devint membre du Bureau des longitudes en 1893. Il présida cette institution en 1899.

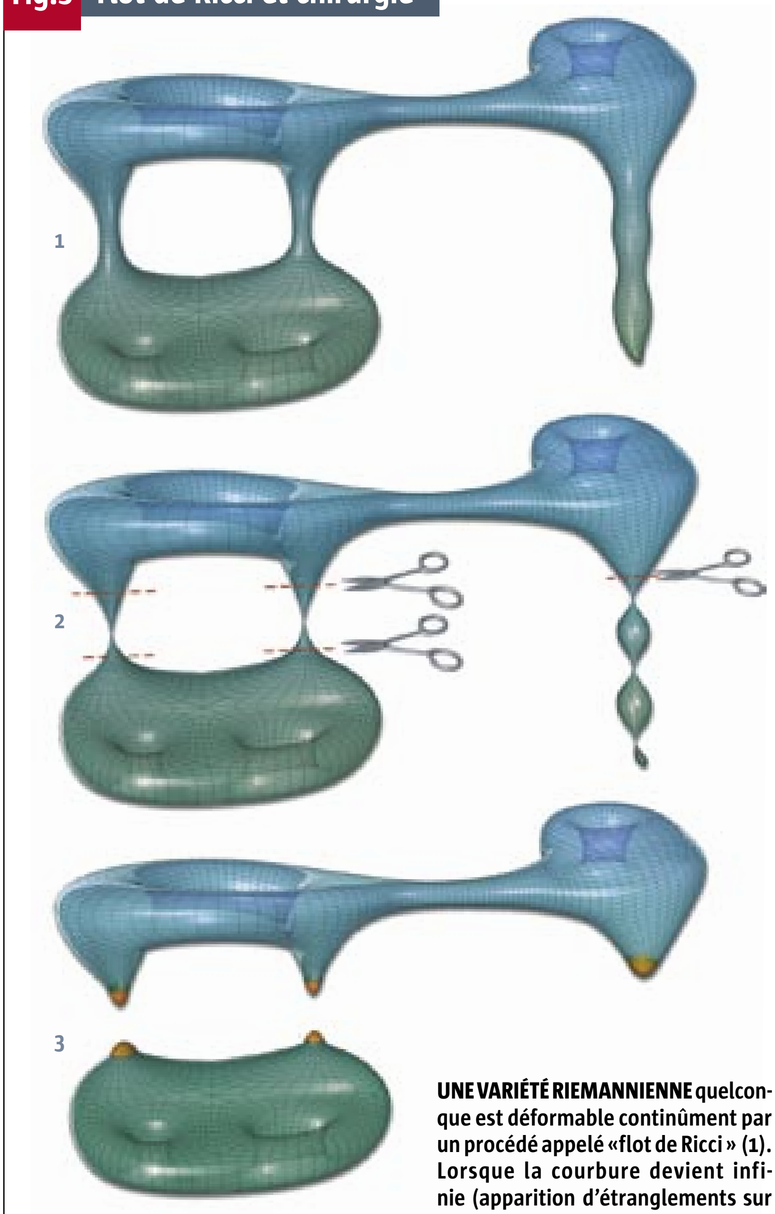


**GÉOMÉTRIE**

## Le premier topologue

**HENRI POINCARÉ** (1854-1912) fut ce qu'on appelle aujourd'hui un X-Mines, puisqu'il fut élève de l'École polytechnique, puis de l'École des mines. Mathématicien renommé, ce cousin du président de la République Raymond Poincaré était aussi physicien et philosophe des sciences. Pour résoudre les questions qu'il se posait en mécanique céleste (problème des *n* corps) et en relativité, il développa une branche des mathématiques, l'*analysis situs,* ou géométrie de situation, et que nous appelons aujourd'hui la topologie. Il s'agit de l'étude des propriétés invariantes des espaces par déformations continues. C'est dans ce cadre que Poincaré a émis sa conjecture.

**Fig.3** **Flot de Ricci et chirurgie**




**UNE VARIÉTÉ RIEMANNIENNE** quelconque est déformable continûment par un procédé appelé «flot de Ricci» (1). Lorsque la courbure devient infinie (apparition d'étranglements sur ce schéma), cette déformation s'arrête (2). L'Américain Robert Hamilton a inventé en 1982 la « chirurgie » : on a le droit de poursuivre la déformation si l'on coupe ces parties de grande courbure et qu'on les remplace par un cylindre ou par un capuchon (en orange) (3). Pour la variété de dimension 2 représentée ici, comme elle n'est pas connexe, on n'aboutit pas à une sphère mais à une surface de genre plus élevé. 

⇨ bure constante nulle. Il est dit plat. La sphère est de courbure constante positive, tandis que l'espace hyperbolique est de courbure constante négative. Tout un ensemble de travaux a conduit, au début du XX$^{e}$ siècle à un résultat important : la géométrie de toute surface à deux dimensions est sphérique sur la sphère, plate sur les surfaces de genre un (la bouée) et hyperbolique sur toutes les autres (celles de genre supérieur à un).

À l'instar de Poincaré, William Thurston s'est intéressé aux espaces à trois dimensions. Il a proposé une conjecture, selon laquelle « *tout espace compact à trois dimensions peut être décomposé en morceaux de géométrie particulière* » [5]. Peter Scott, de l'université du Michigan, venait de montrer qu'il en existe huit possibles : les trois géométries de la situation à deux dimensions (sphérique, euclidienne et hyperbolique), mais aussi cinq autres possédant toutes d'importants groupes de symétries. En déplaçant la conjecture de Poincaré sur le terrain de la géométrie, W. Thurston a indiqué une nouvelle manière de montrer qu'un espace compact simplement connexe est une sphère : il suffit de prouver l'existence d'une géométrie sphérique sur tout cet espace. Il a résolu sa conjecture dans des cas particuliers importants, mais n'a pas réussi à généraliser. Néanmoins, en intégrant dans cette histoire une dose de géométrie, il a ouvert la boîte de Pandore. Car avec la géométrie, c'est toute l'analyse qui s'est ensuite engouffrée dans ce problème de topologie.

## Flot de courbure

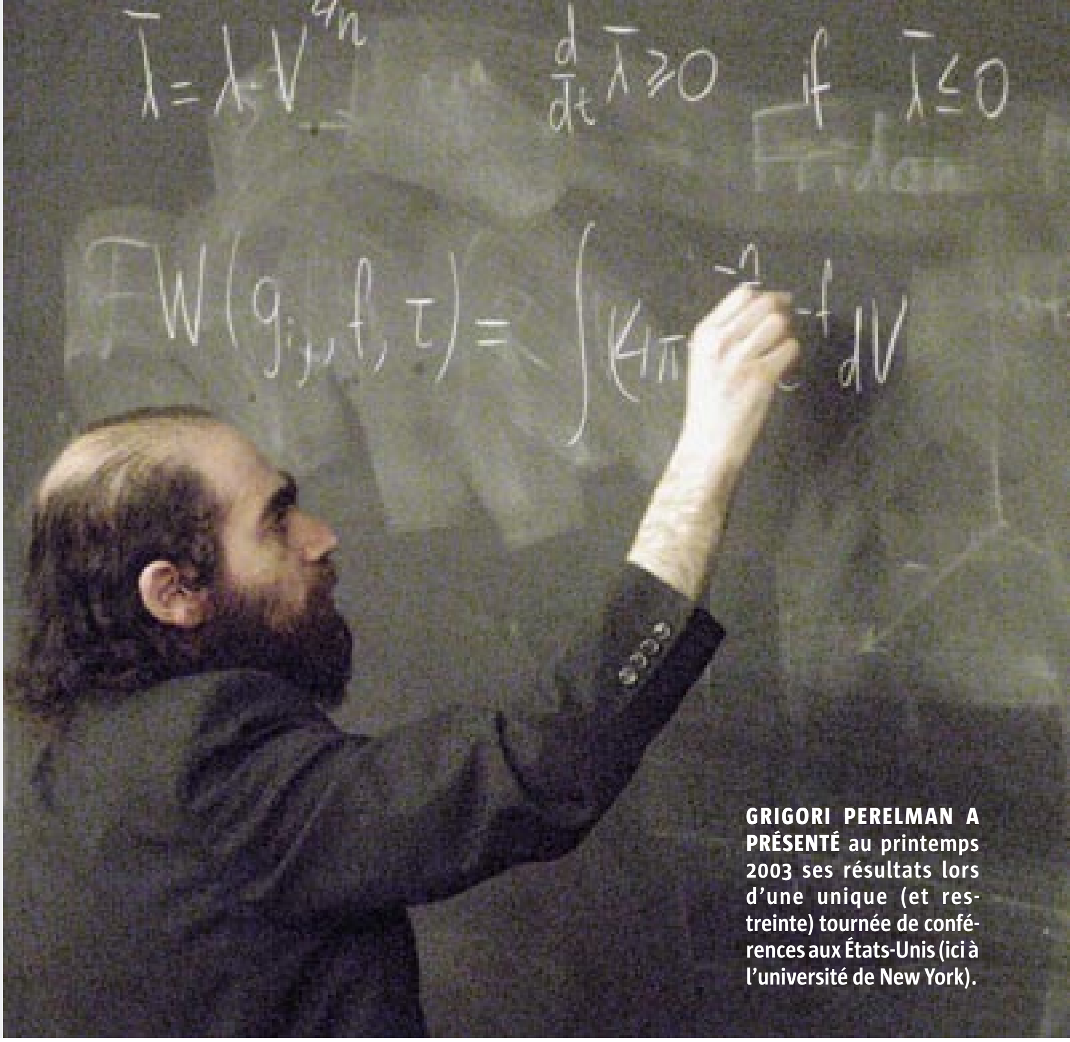
En 1982, l'année même où W. Thurston publiait sa conjecture, le mathématicien américain Richard Hamilton mit en effet au point une méthode originale pour s'attaquer aux problèmes proposés par H. Poincaré et W. Thurston. Selon lui, la géométrie sphérique, dont on cherche à montrer l'existence, doit minimiser une fonction qu'on peut associer à une sorte d'énergie, calculée à l'aide de sa courbure. Il construisit ainsi, par déformation continue, une famille de métriques g qui, partant d'une métrique quelconque, devrait conduire à la géométrie sphérique [6]. Sa famille de métriques dépend d'un paramètre que nous pouvons métaphoriquement appeler le temps. Elle satisfait l'équation $dg/dt = -2\mathrm{Ric}(g(t))$. Le premier membre représente la dérivée de la métrique en fonction du temps. Le second membre est une version de la notion de courbure, appelée courbure de Ricci. On la définit comme la différence entre les volumes euclidien et riemannien, alors que la courbure habituelle mesure des différences de longueurs. C'est un objet de même nature que la métrique, puisqu'il s'agit d'associer à chaque point de l'espace tangent une forme bilinéaire qui ressemble à un produit scalaire. De la sorte, l'équation ci-dessus définit comment varie la métrique dans le temps, ce que nous appelons maintenant « le flot de la courbure de Ricci ».

En appliquant cette équation à un espace compact simplement connexe, celui-ci doit se déformer progressivement jusqu'à devenir une sphère. Le fait que la courbure soit celle de la métrique dont on prend la dérivée implique que l'équation est non linéaire, c'est-à-dire que la somme de deux de ses solutions n'est en général

## BIOGRAPHIE Loin du bruit et des louanges

**GRIGORI PERELMAN** est né à Saint-Pétersbourg en 1966. Après son doctorat à l'université de Leningrad, il intègre l'institut de mathématiques Steklov, puis passe par New York et Berkeley, en Californie, à la fin des années 1980. Il revient à Saint-Pétersbourg au début des années 1990 et s'isole du monde jusqu'à la publication, en 2002 et 2003, de ses articles sur la conjecture de Poincaré. Il refuse la reconnaissance de ses pairs. Déjà, en 1990, il avait décliné le prix que la Société européenne de mathématiques lui avait décerné. En août 2006, il a refusé la médaille Fields, l'équivalent du prix Nobel pour les mathématiciens. Il refusera probablement aussi le million de dollars que voudrait lui offrir la fondation Clay pour la résolution de ce très difficile problème de topologie.





**GRIGORI PERELMAN A PRÉSENTÉ** au printemps 2003 ses résultats lors d'une unique (et restreinte) tournée de conférences aux États-Unis (ici à l'université de New York).

pas une solution. Elle entre dans le cadre des équations aux dérivées partielles. Cela signifie que l'équation différentielle du flot de Ricci n'admet qu'une unique famille de métriques qui vaut une métrique donnée au temps 0. Elle n'existe *a priori* que pour une durée donnée petite. Au-delà on ne peut généralement rien dire, parce qu'une équation non linéaire peut diverger en temps fini. Cette existence en temps petit (c'est le terme mathématique adéquat) est essentiellement un résultat d'analyse mathématique.

## Chirurgie

R. Hamilton a développé de nombreux outils pour décrire l'évolution de ces métriques. Certains reflètent de manière remarquable l'interaction entre l'analyse et la géométrie. Il a ainsi montré que, si la métrique de départ possède une courbure de Ricci strictement positive, alors la variété compacte simplement connexe dont nous sommes partis est la sphère. Cela aurait pu être la preuve de la conjecture de Poincaré, s'il n'y avait cette hypothèse sur la courbure. En effet, pour prouver la conjecture de Poincaré, il faut partir d'une variété compacte simplement connexe dont nous ne savons rien, même pas le signe de la courbure.

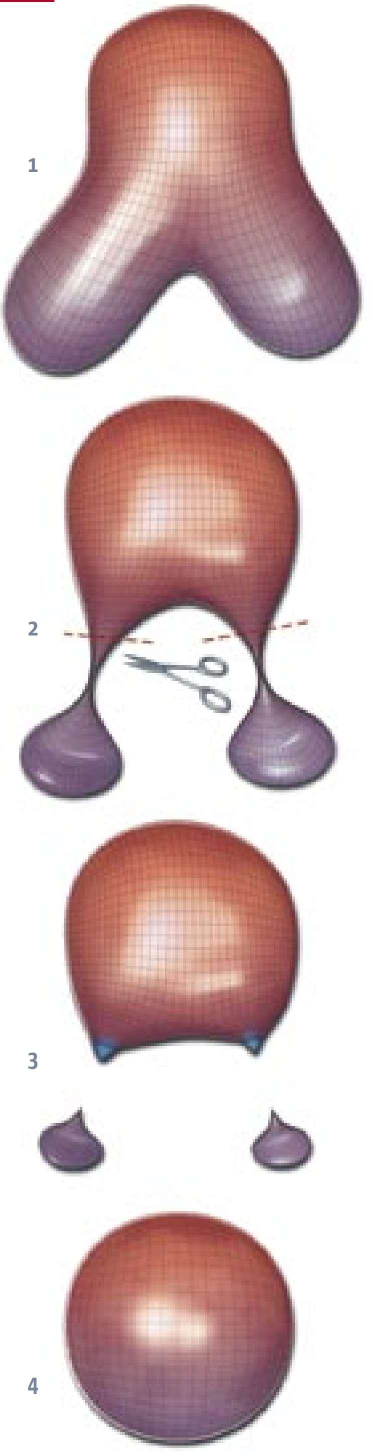
R. Hamilton est allé plus loin. Il a aussi montré que le flot de Ricci s'arrête si, au cours du temps, la courbure devient infiniment positive (et seulement dans ce cas). En effet, la métrique n'est alors plus riemanienne. Elle est dite dégénérée. Pour éviter ce problème, il a suggéré une procédure remarquable, que nous appelons maintenant la chirurgie. Elle consiste à éliminer les parties de grande courbure, celles qui vont devenir infinies donc dégénérées, en coupant la variété et en rebouchant les trous par des objets standard. Des problèmes techniques l'ont bloqué dans la poursuite de son programme. Et c'est G. Perelman qui a résolu ces difficultés.

**On peut éliminer les parties de grande courbure en coupant et en rebouchant les trous**

La finesse et la virtuosité technique des arguments développés par Perelman sont époustouflantes. Il a décrit ce qui se passe dans le voisinage d'un point où la courbure est plus grande qu'un nombre fixé. Il a montré que, quand la métrique riemannienne développe une grande courbure en certains endroits de la variété, celle-ci peut se représenter localement par deux modèles. Il s'agit d'un cylindre à trois dimensions ou d'un capuchon standard, un cylindre bouché d'une forme dont la métrique est explicitement connue, telle celle d'une demi-sphère. Ainsi, là où la courbure est grande, la variété est connue puisqu'elle équivaut à un cylindre ou à un capuchon. Au contraire, là où les choses semblent se ⇨

**[5]** W. Thurston, *Bull. Amer. Math. Soc., 6*, 357, 1982.
**[6]** R. Hamilton, *J. Diff. Geom., 17*, 255, 1982.

**Fig.4 Retrouver la sphère**




**LES DÉFORMATIONS** d'une variété compacte simplement connexe de dimension 2 (1), au cours du flot de Ricci avec chirurgie (2 et 3), aboutissent forcément à une sphère (4). Grigori Perelman a montré qu'il en va de même si la variété est de dimension 3 : on aboutit à une sphère en un temps fini.

⇨ passer le plus normalement du monde, nous ne savons rien.

On peut tirer un grand bénéfice de cette description. Si la courbure est grande partout, la variété est alors constituée de cylindres ou de capuchons standard. Les topologies possibles sont alors limitées. Notre objet est un tore à trois dimensions s'il est constitué d'une suite de cylindres qui vont s'emboîter les uns dans les autres. Il est une déformation continue d'une sphère s'il possède deux capuchons. Le cas d'un seul capuchon n'est pas possible car la variété comporterait alors un bord: elle ne serait pas compacte. De même, plus de deux capuchons n'est pas non plus possible, car la variété ne serait pas d'un seul tenant. Elle ne serait pas connexe.

**Si la courbure est grande partout, il n'y a que deux topologies possibles: la sphère ou le tore**

Dans tous les cas où la courbure est grande partout, si la variété de départ est simplement connexe, ce ne peut être un tore, comme en dimension 2. C'est donc une sphère, à une déformation continue près (nous disons « homéomorphe » à une sphère). Pour prouver la conjecture de Poincaré, on a donc tout intérêt à montrer que le flot conduit à des métriques de grande courbure partout.

Malheureusement, il arrive souvent que des singularités, formes de courbure infinie, n'apparaissent qu'en certains endroits de la variété. Cela arrête le flot de Ricci sur toute la variété riemannienne. C'est là que l'idée de R. Hamilton, conjuguée aux résultats de G. Perelman, devient efficace. La chirurgie peut réparer ce qui semble être un traumatisme. Il suffit de sectionner transversalement chaque cylindre à trois dimensions en son milieu. G. Perelman a montré qu'on peut se désintéresser de la partie de grande courbure, sans altérer la variété. Sur le bord du cylindre restant, qui est homéomorphe à une sphère à deux dimensions, on greffe un capuchon standard. Nous obtenons ainsi une nouvelle variété riemannienne à partir de laquelle on peut relancer le flot de Ricci et le poursuivre [fig. 3].

Le fleuron des travaux de G. Perelman est alors le théorème qui affirme que l'on peut poursuivre cette procédure sans problème, car, dans un temps fini, il n'y a qu'un nombre fini d'actes de chirurgie, ce que n'avait pas vu R. Hamilton. Il construit ainsi ce que l'on appelle maintenant « le flot avec chirurgie ». Dans un dernier article, il démontre que ce flot avec chirurgie conduit, en un temps fini, à une grande courbure partout, si l'on part d'un espace compact simplement connexe [fig. 4]. Or, comme on l'a vu, une grande courbure partout n'est l'apanage que de la sphère. La conjecture de Poincaré est prouvée.

## Plus loin que Poincaré

La réussite de G. Perelman va au-delà de ce résultat, puisque ses articles annoncent la preuve de la conjecture de Thurston. Nous connaissons toutes les géométries et savons comment elles s'articulent lorsqu'elles sont présentes sur des parties différentes d'une même variété. La situation en trois dimensions est maintenant la même qu'en deux dimensions. Au moment où ce texte est rédigé, il reste quelques zones d'ombre qui, sans aucun doute, seront clarifiées rapidement.

Le lecteur aura noté que nous n'avons jamais affirmé que la métrique tendait à devenir sphérique. La preuve de la conjecture de Poincaré est obtenue à l'aide d'un raisonnement de topologie élémentaire, en recouvrant l'espace par des cylindres et des capuchons. La description de l'évolution ultime de ces métriques est une question passionnante qui reste à traiter. D'autres domaines plus difficiles à exposer ici peuvent être attaqués par la même approche. Une intense activité s'est d'ailleurs développée depuis la parution des articles de G. Perelman et des différents textes de notes des autres mathématiciens sur ses travaux. Depuis peu, les physiciens réinterprètent l'approche de G. Perelman, et il est certain que des idées nouvelles vont surgir de cette interaction.

La méthode utilisée pour résoudre ces grands problèmes, alliant géométrie et analyse, n'est ni totalement nouvelle ni inattendue. De même, Grigori Perelman n'est pas un illustre inconnu surgi de nulle part. Mais, de 1995 à 2002, il n'a jamais dévoilé ses centres d'intérêt. C'est pourquoi la mise en ligne de ses articles a stupéfait la communauté mathématique mondiale. Si ce n'est pas vraiment une surprise, c'est un joli contre-pied. ■ **G. B.**